Atmosphère à gradient thermique. Ballon atmosphérique. Stabilité de l'atmosphère.

On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire $M_0 = 29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et de coefficient $\gamma_0 = C_p/C_v$ constant et égal à 1,4. On observe expérimentalement que la température varie linéairement avec l'altitude selon la loi $T(z) = T_0 - a\,z$ avec a de l'ordre de 6 K/km (à vérifier lors d'une randonnée en montagne : ne pas oublier le pull dans le sac à dos !).

Question 1 :
Expliquer l'origine de ce gradient quand l'air est calme. Etablir la loi donnant la variation de la pression avec l'altitude.

L'atmosphère est plutôt transparente aux rayons infrarouges qui ne la réchauffent donc pas. Par contre, ils sont absorbés par le sol dont la température s'élève et qui réchauffe donc l'atmosphère par le bas. En l'absence de phénomènes convectifs, la diffusion de la chaleur est un phénomène lent et seules les basses couches sont concernées d'où une température décroissant avec l'altitude.

Pour la pression, on part de la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g$$

et de l'équation d'état des gaz parfaits sous la forme

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R\,T}{M_0} = \frac{R\,(T_0 - a\,z)}{M_0}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M_0\,g}{R\,(T_0 - a\,z)}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(équation 1)}$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{M_0\,g}{R\,a}\,\ln\left(\frac{T_0 - a\,z}{T_0}\right)$$

$$p(z) = p(0)\,\left(\frac{T_0 - a\,z}{T_0}\right)^{\frac{M_0\,g}{R\,a}}$$

Faisons un peu de zèle : en reportant ce résultat dans l'équation d'état, on a

$$\rho(z) = \rho(0)\,\left(\frac{T_0 - a\,z}{T_0}\right)^{\left(\frac{M_0\,g}{R\,a}-1\right)}$$

Question 2 :
Un ballon atmosphérique, dont les structures solides et la charge emportée ont une masse totale m_u, est empli d'une masse m_g d'un gaz léger, de masse molaire M (de coefficient γ constant), enfermé dans une membrane souple assurant à tout moment l'équilibre entre la pression de ce gaz et la pression atmosphérique. On envisage ici l'équilibre du ballon à altitude constante depuis un temps suffisamment long pour que l'équilibre thermique entre gaz et atmosphère ait eu le temps de s'établir. A quelle condition le ballon reste-t-il à altitude constante ? Quels gaz pouvez vous proposer et préciser leurs avantages et inconvénients.

A l'altitude z, le gaz et l'atmosphère sont à la température $T(z)$ donnée en énoncé et à la pression $p(z)$ calculée ci-dessus. les masses volumiques de l'atmosphère et du gaz sont respectivement $\rho_0(z) = M_0\,p(z)/R\,T(z)$ et $\rho(z) = M\,p(z)/R\,T(z)$.

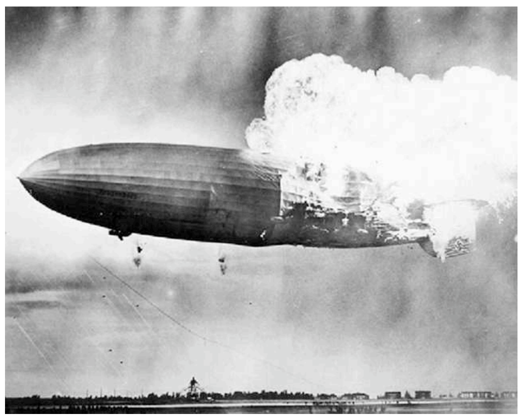
Le volume de gaz est $V = m_g\,/\rho(z)$ et la norme de la poussée d'Archimède est $\rho_0(z)\,V\,g$, en négligeant le volume de la structure par rapport à celui du gaz. A l'équilibre le poids total gaz, structure et charge est opposée à la poussée d'Archimède, d'où successivement

$$(m_u + m_g)\,g = \frac{\rho_0}{\rho}\,m_g\,g$$

$$m_u = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) m_g$$
$$m_u = \left(\frac{M_0}{M} - 1\right) m_g$$

On remarque que la condition d'équilibre ne fait finalement pas intervenir l'altitude. Comme une masse est par essence positive, il faut que $M < M_0$. Les gaz de masse molaire inférieure à $29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ sont rares : les plus efficaces seraient le dihydrogène ($2\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) pas trop cher mais explosif (cf l'explosion du dirigeable Hindenburg le 6 mai 1937 à l'atterrissage à Lakehurst, New Jersey, photo d'époque ci-dessous) ou l'hélium ($4\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$), sans danger mais coûteux. Sur le papier restent possibles le néon ($20\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) sans danger mais coûteux, et qui est une solution idiote par rapport à l'hélium beaucoup plus efficace, le méthane ($16\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) peu coûteux mais inflammable, l'ammoniac ($17\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$) et l'acide fluorhydrique ($20\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$), tous deux pas trop coûteux mais d'une extrême toxicité.

Une fois le gaz choisi, il en faudra une masse suffisante, de l'ordre de m_u donc occupant un volume énorme.



Question 3 :

On se propose d'étudier la stabilité de l'équilibre précédent. Pour cela, on imagine qu'une petite perturbation, le passage d'un oiseau un peu curieux par exemple, décale le ballon d'une hauteur* $\mathrm{d}z$*. L'équilibre des pressions entre gaz du ballon et atmosphère se fait instantanément, par contre la transformation est adiabatique réversible. Justifier cette approximation. A quelle condition l'équilibre est-il stable ? Préciser numériquement dans le cas d'un ballon gonflé à l'hélium.

Les échanges thermiques sont toujours lents, ce qui justifie l'hypothèse adiabatique et, comme on part de l'équilibre, les causes d'irréversibilité sont faibles.

Supposons pour fixer les idées que $\mathrm{d}z$ soit positif. Le poids, gaz compris, du ballon ne change évidemment pas. Si la norme de la poussée d'Archimède, initialement égale au poids, augmente, elle dépasse le poids et le bilan de forces est dirigé vers le haut et le ballon s'écarte encore plus. Différentions donc l'expression de cette force, ou mieux de son logarithme qui varie dans le même sens, astuce classique de la «différentielle logarithmique» quand une expression ne contient ni addition ni soustraction. On part de l'expression de la poussée établie plus haut.

$$F_A = \frac{\rho_0(z)}{\rho(z)}\, m_g\, g$$
$$\ln F_A = \ln \rho_0(z) - \ln \rho(z) + \ln m_g + \ln g$$
$$\frac{\mathrm{d}F_A}{F_A} = \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + 0 + 0$$

On a établi plus haut l'expression de ρ_0, faisons lui subir le même traitement :

$$\rho_0(z) = M_0\, p(z)/R\,T(z)$$
$$\frac{\mathrm{d}\rho_0}{\rho_0} = \frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}T}{T}$$

Par contre l'expression de ρ, établie plus haut dans un contexte d'équilibre thermique avec l'extérieur, n'est plus valable ici, dans un contexte adiabatique. On part ici de l'équation de Laplace, avec le γ du gaz du ballon atmosphérique

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = Cte$$
$$\ln p - \gamma\, \ln \rho = \ln Cte$$
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} - \gamma\, \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}p}{\gamma\, p}$$

On reporte

$$\frac{\mathrm{d}F_A}{F_A} = \frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}p}{\gamma\, p} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}T}{T}$$

Pause : Qui suis-je ? D'où viens-je ? Où vais-je ?[1]

Je veux étudier le signe de $\mathrm{d}F_A$ pour $\mathrm{d}z$ donné positif. Les fonctions $p(z)$ et $T(z)$ sont connues, ce sont donc elles qu'il faut exploiter. L'équation 1 s'impose pour $p(z)$ et pour $T(z)$, le calcul est immédiat.

$$\frac{\mathrm{d}F_A}{F_A} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M_0\, g}{R\,(T_0 - a\, z)}\,\mathrm{d}z + \frac{a}{T_0 - a\, z}\,\mathrm{d}z$$
$$\frac{\mathrm{d}F_A}{F_A} = \left(a - \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M_0\, g}{R}\right)\,\frac{\mathrm{d}z}{(T_0 - a\, z)}$$

Le raisonnement initial permet d'affirmer que l'équilibre est stable si $\mathrm{d}F_A$ est négatif quand $\mathrm{d}z$ est positif, soit si

$$\boxed{a < \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M_0\, g}{R}}$$

Application numérique : pour l'hélium, monoatomique on a $C_{Vm} = (3/2)\,R\,T$ d'où $C_{Pm} = C_{Vm} + R = (5/2)\,R\,T$ et $\gamma = C_{Pm}/C_{Vm} = 5/3$, pour l'air $M_0 = 29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et l'on a $g = 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $R = 8,32\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$; la condition est alors

$$\boxed{a < 13,6\,\mathrm{K\,km^{-1}}}$$

Question 4 :

Comment adapter ce qui précède pour trouver une condition de stabilité (absence de convection) de l'atmosphère. Indiquer qualitativement dans quel sens varie la conclusion si l'air est gorgé de vapeur d'eau. Expliquer comment le gradient de température se stabilise.

Il suffit de supprimer la charge et les structures et de remplacer le gaz par l'air, ce qui revient à envisager le déplacement d'une masse d'air finie entourée du reste de l'atmosphère. La lenteur des phénomènes de diffusion empêche que ces deux masses ne se mélangent et la masse d'air envisagée est virtuellement enfermée. Dans ce qui précède, il ne faut que remplacer γ par $\gamma_0 = 7/5$, la condition est alors

[1] Rappelons la réponse de Pierre Dac : «Je suis moi, je viens de chez moi et j'y retourne !»

$$\boxed{a < 9,8\,\mathrm{K\,km^{-1}}}$$

Quand l'air s'élève, sa pression diminue et sa température baisse selon la loi de Laplace liant p et T

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T^{\gamma}} = Cte \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

Si l'air est humide, quand la température diminue du fait de la détente adiabatique, la pression d'équilbre de la vapeur d'eau diminue très rapidement et la vapeur, devenue ainsi sursaturante, se condense en libérant de l'énergie qui réchauffe partiellement l'air ; formellement cela revient à diminuer la valeur de $(\gamma-1)/\gamma$ donc la valeur critique du gradient thermique. Typiquement, le gradient thermique critique de l'air humide est celui donné dans l'énoncé, à savoir 6 Kelvin par kilomètre. L'étude est possible, a été donné en concours il y a bien longtemps mais est plutôt délicate.

On a dit plus haut que le soleil chauffe le sol qui chauffe l'air par dessous. Laissons faire les choses : le sol chauffe de plus en plus, sa température s'élève alors que la température des hautes couches de l'atmosphère ne varie pas car la diffusion est d'autant plus lente qu'on va plus loin. Le gradient thermique augmente donc. Lorsqu'il atteint la valeur critique, l'air devient instable et la convection emmène l'air chaud du sol en altitude et l'air froid d'altitude vers le sol : le gradient diminue. Lorsqu'il passe sous la valeur critique, l'air redevient stable et le sol recommence à s'échauffer et l'on repart pour un tour. On conçoit bien ainsi que le gradient reste voisin du gradient critique.

On en apprend des choses, non ?